

Методы дискретной оптимизации

Столбцовые симплекс-таблицы.
Двойственный симплекс-метод

Столбцовые симплекс-таблицы

Рассмотрим задачу линейного программирования (ЛП) в каноническом виде

$$(c, x) \rightarrow \max, \quad x \in X = \{x \in R_+^n \mid Ax = a^0\}. \quad (1)$$

Здесь матрица $A \in R^{m \times n}$ имеет m линейно независимых строк, в противном случае система либо несовместна либо часть уравнений можно исключить. Вектор правой части системы и столбцы матрицы A суть $a^j, j = 0, \dots, n$.

Назовем базисом матрицы A набор из m линейно независимых ее столбцов, а базисным решением системы $Ax = a^0$, соответствующим выбранному базису, назовем такое решение, для которого любая координата, не соответствующая базисному столбцу, равна нулю.

Если базисное решение системы является неотрицательным вектором, т.е. точка x допустима для задачи (1), то такая точка является крайней точкой для допустимого множества задачи (1) и наоборот: крайняя точка множества X есть неотрицательное базисное решение системы $Ax = a^0$.

Столбцовые симплекс-таблицы

Будем обозначать через I_B множество номеров базисных векторов-столбцов матрицы A , а через I_N множество номеров небазисных (или свободных) переменных.

Запишем систему уравнений в задаче (1) в виде $a^0 = \sum_{j \in I_B} a^j x_j + \sum_{j \in I_N} a^j x_j$. Если матрицы $(a^j, j \in I_B)$ и $(a^j, j \in I_N)$ обозначить через B и N соответственно, то базисные переменные выражаются через небазисные: $x_i = x_{i0} - \sum_{j \in I_N} x_{ij} x_j$, здесь

$$x_{ij} = (B^{-1}a^j)_i, \quad j \in I_N \cup \{0\}, \quad i \in I_B.$$

Значение целевой функции представим тогда в виде

$$(c, x) = \sum_{j \in I_N} c_j x_j + \sum_{i \in I_B} c_i x_{i0} - \sum_{j \in I_N} \sum_{i \in I_B} c_i x_{ij} x_j = \sum_{i \in I_B} c_i x_{i0} - \sum_{j \in I_N} x_{0j} x_j,$$

здесь и далее

$$x_{0j} = \sum_{i \in I_B} c_i x_{ij} - c_j, \quad j \in I_N, \quad x_{00} = \sum_{i \in I_B} c_i x_{i0}.$$

Столбцовые симплекс-таблицы

Задача (1) теперь запишется в виде

$$x_0 = x_{00} - \sum_{j \in I_N} x_{0j} x_j \rightarrow \max, \quad (2)$$

$$x_i = x_{i0} - \sum_{j \in I_N} x_{ij} x_j \geq 0, \quad i \in I_B, \quad (3)$$

$$x_j = 0 - (-x_j) \geq 0, \quad j \in I_N. \quad (4)$$

Таким образом, если x – крайняя точка допустимого множества задачи (1), то ее координаты суть $x_i = x_{i0}$ при $i \in I_B$, $x_i = 0$ при $i \in I_N$. Из условий (2)-(4) непосредственно следует, что одновременное выполнение неравенств $x_{0j} \geq 0, j \in I_N$ есть необходимое и достаточное условие максимума для базисного допустимого решения.

Столбцовые симплекс-таблицы

Для любой пары (i, j) такой, что $i, j \in I_N$ положим

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ -1, & i = j \end{cases}$$

Задаче (2)-(4) теперь можно поставить в соответствие столбцовую симплекс-таблицу, т.е. матрицу $T \in R^{(n+1) \times (|I_N|+1)}$:

$$T = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{0j} \\ x_{i0} & x_{ij} \end{pmatrix},$$

здесь $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in I_N$. i -я строка t_i этой матрицы равна $-e_i^T$, $e_i \in R^{(|I_N|+1)}$ при всех $i \in I_N$, нулевой столбец t^0 содержит значение целевой функции в текущей крайней точке (x_{00}) и координаты этой точки $(x_{i0}, i = 1, \dots, n)$.

Поскольку базис матрицы A может быть выбран неоднозначно и нам придется переходить от одного базиса к другому, то необходимо выяснить, как изменяются элементы матрицы T при замене базиса. Рассмотрим случай, когда из базиса выводится один из столбцов и вместо него вводится какой-то небазисный столбец.

Столбцовые симплекс-таблицы

Выберем номер $s \in I_B$ такой, что $x_{sl} \neq 0$ для некоторого $l \in I_N$. Выведем столбец a^s из базиса матрицы A и вместо него введем в базис a^l .

Переменную x_l можно выразить из s -го неравенства (3):

$$x_l = \frac{x_{s0}}{x_{sl}} - \frac{x_s}{x_{sl}} - \sum_{j \in I_N, j \neq l} \frac{x_{sj}}{x_{sl}} x_j;$$

подставляя данное выражение в выражения для каждого x_i , $i \in I_B \cup \{0\}, i \neq s$ получим:

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i0} - \sum_{j \in I_N, j \neq l} x_{ij} x_j - x_{il} \left(\frac{x_{s0}}{x_{sl}} - \frac{x_s}{x_{sl}} - \sum_{j \in I_N, j \neq l} \frac{x_{sj}}{x_{sl}} x_j \right) = \\ &= x_{i0} - x_{s0} \frac{x_{il}}{x_{sl}} + \frac{x_{il}}{x_{sl}} x_s - \sum_{j \in I_N, j \neq l} \left(x_{ij} - \frac{x_{sj}}{x_{sl}} x_{il} \right) x_j = \\ &= \left(x_{i0} - \frac{x_{s0}}{x_{sl}} x_{il} \right) - \sum_{j \in I_N, j \neq l} \left(x_{ij} - \frac{x_{sj}}{x_{sl}} x_{il} \right) x_j - \frac{x_{il}}{x_{sl}} (-x_s). \end{aligned}$$

Столбцовые симплекс-таблицы

Тогда для столбцов $t^j, j \neq l$ матрицы T верны формулы перехода:

$$t^j \rightarrow t^j - \frac{x_{sj}}{x_{sl}} t^l, j \in \{0\} \bigcup I_N, \quad (5)$$

$$t^s \rightarrow \frac{t^l}{-x_{sl}}. \quad (6)$$

Нетрудно убедиться в том, что строки преобразованных векторов симплекс-таблицы, соответствующие небазисным переменным, будут равны

$$-e_i^T, \quad e_i \in R^{(|I_N|+1)}, \quad i \in \{s\} \bigcup I_N, i \neq l.$$

Покажем, что условие $x_{i0} \geq 0, j \in I_N$ является необходимым и достаточным условием оптимальности. Достаточность. $x_j = 0, j \in I_N$ рассмотрим вариации точки x . Фиксируем номер $j \in I_N$, увеличивая соответствующие координаты x_j . При любом таком увеличении значение целевой функции может только уменьшиться. Необходимость доказывается аналогично, но если существует i такое что $x_{i0} = 0$ тогда $x_i = x_{i0} - \sum_{j \in I_N} x_{ij} x_j \geq 0$. Значит соответствующий столбец можно выбросить из симплекс-таблицы и перейти в пространство меньшей размерности.

Прямо- и двойственно допустимые симплекс таблицы

Вектор a называется лексикографически положительным: $a \succ 0$, если первая ненулевая координата его положительна. При этом вектор a лексикографически больше вектора b , если $a - b \succ 0$. Кроме того, $a \prec 0 \iff -a \succ 0$.

Назовем симплекс-таблицу T **прямо допустимой**, если $x_{i0} \geq 0$, $i \geq 1$. Рассмотрим двойственный симплекс-метод, предполагая, что симплекс-таблица T двойственно допустима: векторы-столбцы $t^j \succ 0$, $j \in I_N$. Если симплекс-таблица кроме того и прямо допустима, то крайняя точка, соответствующая этой таблице, является решением исходной задачи и координаты этого решения находятся в столбце t^0 . В противном случае обозначим через s какой-либо элемент среди тех номеров $i \in \{1, \dots, n\}$, для которых $x_{i0} < 0$. Для найденного номера s определим номер l из условия

$$\frac{t^l}{-x_{sl}} = \operatorname{lexmin} \left\{ \frac{t^j}{-x_{sj}} \mid x_{sj} < 0, \quad j \in I_N \right\}.$$

Прямо- и двойственно допустимые симплекс таблицы

Здесь мы предполагаем, что множество $J_s = \{j \in I_N \mid x_{sj} < 0\} \neq \emptyset$. В этом случае номер a^s выводим из базиса, а вектор a^l вводим в базис.

Симплекс-таблица при этом в соответствии с (5),(6) переходит в двойственно допустимую симплекс-таблицу:

$$t^j - \frac{x_{sj}}{x_{sl}} t^l = -x_{sj} \left(\frac{t^j}{-x_{sj}} - \frac{t^l}{-x_{sl}} \right) \succ 0 \quad \text{при всех } j \in J_s$$

по правилу выбора номера l ; кроме того,

$$t^j - \frac{x_{sj}}{x_{sl}} t^l \geq t^j \succ 0 \quad \text{при всех } j \in I_N : x_{sj} \geq 0$$

и

$$\frac{t^l}{-x_{sl}} \succ 0$$

по предположению двойственной допустимости.

Прямо- и двойственно допустимые симплекс таблицы

В случае, когда множество $J_s = \emptyset$, ограничение, соответствующее номеру s , дает пустое множество, поскольку в этом случае $x_s \leq x_{s0} < 0$, если $x_{sj} \geq 0, j \in I_N$. Таким образом, если $J_s = \emptyset$, то множество допустимых точек исходной задачи является пустым.

По условию вектор-столбец $t^l \succ 0$, $x_{s0} < 0$, $x_{sl} < 0$, поэтому

$$t^0 - \frac{x_{s0}}{x_{sl}} t^l \prec t^0,$$

что означает лексикографическое убывание вектора t^0 при нашей замене базиса. Отсюда непосредственно следует **Двойственный симплекс-метод**.

Двойственный симплекс-метод

Теорема

Двойственный симплекс-метод за конечное число итераций позволяет получить решение задачи ЛП в случае ее разрешимости или устанавливает ее неразрешимость вследствие несовместности ее ограничений.

Доказательство. Число базисных решений системы $Ax = a^0$ (а значит и множеств I_B) конечно и каждая симплекс-таблица взаимно однозначно соответствует множеству I_B , следовательно, число симплекс-таблиц для конкретной задачи также конечно. С другой стороны, вследствие монотонного убывания вектора t^0 на каждой итерации метода мы получаем двойственно допустимую симплекс-таблицу, не присутствовавшую ранее. Значит, на каком-то шаге либо будет получено условие $x_{i0} \geq 0, i \in I_B$, которое означает, что решение уже получено, либо условие $x_{s0} < 0, J_s = \emptyset$, что означает пустоту исходного допустимого множества.

Двойственный симплекс-метод

До сих пор предполагалось, что исходная симплекс-таблица является двойственно допустимой, что обеспечивало двойственную допустимость и на всех последующих итерациях. Если же для выбранного базиса матрицы A наше предположение не выполнено, то наряду с ограничениями (3),(4) можно рассмотреть неравенство

$$x_{n+1} = M - \sum_{j \in I_N} x_j \geq 0.$$

Здесь значение параметра M выбирается из условия, что хотя бы для одного решения исходной задачи это неравенство выполнено. Тогда возможно будет сужено допустимое множество, но некоторые решения исходной задачи будут по-прежнему являться решениями полученной "суженной" задачи. У симплекс-таблицы появится дополнительная строка

$$(M \ 1 \dots 1) \in R^{1 \times (|I_N|+1)},$$

и симплекс-таблица с этой новой строкой будет состоять из векторов-столбцов

$$t_M^j, j \in \{0\} \cup I_N, \quad \text{где} \quad t_M^j = \begin{pmatrix} t^j \\ 1 \end{pmatrix}, j \in I_N, \quad t_M^0 = \begin{pmatrix} t^0 \\ M \end{pmatrix}.$$

Двойственный симплекс-метод

Теперь выведем переменную x_{n+1} из числа базисных переменных, а вместо нее введем x_l , где номер l выберем из условия $t^l = \text{lexmin}\{t^j \mid j \in I_N\}$. Тогда вектор t_M^l перейдет в вектор $-t_M^l \succ 0$, а при других $j \in I_N$ векторы t_M^j перейдут в векторы $t_M^j - t_M^l \succ 0$. Таким образом будет получена двойственно допустимая симплекс-таблица, которая после конечного числа итераций двойственного симплекс-метода перейдет в оптимальную, т.е. и прямо допустимую с множеством I_N небазисных переменных. Для этой оптимальной симплекс-таблицы справедлива

Лемма

Если любое решение исходной задачи удовлетворяет условию $M - \sum_{j \in I_N} x_j 0$, то вспомогательная переменная x_{n+1} является базисной.

Доказательство этого факта легко провести от противного.

Двойственный симплекс-метод

Условие леммы может быть выполнено, если множество решений исходной задачи ограничено, а значение M достаточно велико. Иначе переменная x_{n+1} останется небазисной. В любом случае после вывода из базиса дополнительной строки эту строку можно вычеркнуть из симплекс-таблицы. Следует отметить, что слишком большой величину M выбирать нецелесообразно, так как при этом нулевой столбец симплекс-таблицы может слишком сильно увеличиться лексикографически, вследствие чего может потребоваться много лишних шагов метода. Поэтому для получения двойственно допустимой симплекс-таблицы рассмотрим другой метод, в котором не требуется оценки компонент решения исходной задачи, но при этом возникает необходимость рассмотрения вспомогательной задачи, аналогичной задаче в методе искусственного базиса.

Двойственный симплекс-метод

Будем считать, что в матрице A известен базис, то есть множества I_B, I_N заданы. Данному базису соответствует симплекс-таблица с элементами x_{ij} , не являющаяся двойственно допустимой, по этой таблице нужно построить двойственно допустимую таблицу, то есть выбрать другой базис матрицы A , используя двойственный симплекс-метод. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу

$$(c, x) \rightarrow \max, \quad (x, v) \in X_v = \{(x, v) \in R_+^{2n} \mid Ax = 0, \quad x + v = l\}. \quad (7)$$

Здесь координаты вектора l равны $l_j = 1, j = 1, \dots, n$, а матрица ограничений задачи (7) состоит из векторов $d^j = (a^j, e^j)^T \in R^{m+n}, g^j = (0, e^j)^T \in R^{m+n}, e^j \in R^n$ - j -й координатный вектор, $j = 1, \dots, n$. Для задачи (7) выберем начальный базис матрицы ограничений: $d^j, j = 1, 2, \dots, n, g^i, i \in I_B$ и будем множество базисных векторов этой задачи обозначать как $I_B^d, I_B^g, |I_B^d| = n, |I_B^g| = |I_B|$. Таким образом, начальному базису задачи (7) соответствуют номера базисных переменных $I_B^d = 1, 2, \dots, n, I_B^g = I_B$. Покажем, что выбранные векторы линейно независимы.

Двойственный симплекс-метод

В самом деле, если существуют числа $x_j, j = 1, 2, \dots, n, \quad v_i, i \in I_B$ такие, что

$$\sum_{j=1}^n a^j x_j = 0, \quad x_j = 0, j \in I_N, \quad , x_i + v_i = 0, i \in I_B,$$

то отсюда вытекает, что $x_i = 0, i \in I_B$, а значит $v_i = 0, i \in I_B$, что означает линейную независимость указанных векторов.

Теперь выразим все переменные ограничений задачи (7) через небазисные переменные $v_j, j \in I_N$. Непосредственно из условий (7) следует, что $x_j = 1 - v_j$ при всех $j \in I_N$, откуда для $i \in 0 \cup I_B$ величина

$$x_i = - \sum_{j \in I_N} x_{ij} x_j = - \sum_{j \in I_N} x_{ij} + \sum_{j \in I_N} x_{ij} v_j. \quad (8)$$

Кроме того, для $i \in I_B$ переменная

$$v_i = 1 - x_i = 1 + \sum_{j \in I_N} x_{ij} - \sum_{j \in I_N} x_{ij} v_j. \quad (9)$$

Двойственный симплекс-метод

Из перечисленных выражений для базисных переменных следует, что начальная симплекс-таблица для задачи (7) имеет вид

	t^0	$t^j, j \in I_N$
x_0	$-\sum_{j \in I_N} x_{0j}$	$-x_{0j}, j \in I_N$
$x_i (i \in I_B)$	$-\sum_{j \in I_N} x_{ij}$	$-x_{ij}, j \in I_N$
$x_j (j \in I_N)$	1	$(e^j)^T \in R^{n-m}$
$v_i (i \in I_B)$	$1 + \sum_{j \in I_N} x_{ij}$	$x_{ij}, j \in I_N$
$v_j (j \in I_N)$	0	$-(e^j)^T \in R^{n-m}, j \in I_N$

Двойственный симплекс-метод

Для полученной симплекс-таблицы условия задачи (7) означают, что любая допустимая точка удовлетворяет условию $\sum_{j \in I_N} v_j \leq n - m$. Поэтому вводя строку, соответствующую вспомогательной переменной $x_{n+1} = n - m - \sum_{j \in I_N} v_j \geq 0$, и выводя x_{n+1} из базиса, как это было описано ранее, получим двойственно допустимую симплекс-таблицу. Далее, улучшая ее двойственным симплекс-методом, получим решение задачи (7). В соответствующей симплекс-таблице переменные $v_j, j = 1, 2, \dots, n$ должны быть базисными. Если это условие не выполнено, то введем дополнительное условие $\sum_{j=1}^n v_j \geq n$. Выпишем строку, соответствующую этому неравенству. Пусть в полученной симплекс-таблице I_B^d, I_B^g и I_N^d, I_N^g суть базисные и небазисные наборы переменных x_j, v_j . Тогда в неравенстве $\sum_{j=1}^n v_j \geq n$ выразим все переменные через небазисные:

$$- \sum_{i \in I_B^g} v_{i0} + \sum_{i \in I_B^g} \sum_{i \in I_N^d} x_{ij} x_j + \sum_{i \in I_B^g} \sum_{i \in I_N^g} v_{ij} v_j \geq n.$$

Двойственный симплекс-метод

Последнее неравенство соответствует вспомогательной строке симплекс-таблицы

x_{n+2}	$-n - \sum_{i \in I_B^g} v_{i0}$	$-\sum_{i \in I_B^g} x_{ij}$	$1 - \sum_{i \in I_B^g} v_{ij}$
-----------	----------------------------------	------------------------------	---------------------------------

Теперь, выводя эту строку из базиса и получая решение задачи (7) уже с этим дополнительным условием, получаем такое решение задачи, для которого все переменные v_j будут базисными. Не меняя обозначений, будем считать, что $I_B^g = 1, 2, \dots, n$. В таком случае $|I_B^d| = m$. Кроме того, элементы $x_{ij}, i = 0, 1, \dots, n, j \in I_N^d$ полученной симплекс-таблицы будут являться элементами таблицы, соответствующей исходной задаче. Для получения элементов $x_{i0}, i \in I_B^d$ осталось решить систему $a^0 = \sum_{i \in I_B^d} a^i x_{i0}$, после чего вычислить элемент $x_{00} = \sum_{i \in I_B^d} c_i x_{i0}$. Полученная таблица $x_{ij}, i = 0, 1, \dots, n, j \in I_N^d$ является двойственно допустимой симплекс-таблицей для исходной задачи (1).

Двойственный симплекс-метод

Рассмотрим ранее обсуждавшийся пример:

$$\begin{aligned}x_2 &\rightarrow \max, \\x_3 &= 1 - 3x_1 + 5x_2 \geq 0, \\x_4 &= 3 + 8x_1 - 15x_2 \geq 0, \quad x_{1,2} \geq 0.\end{aligned}$$

Соответствующая симплекс-таблица при $I_B = \{3, 4\}$, $I_N = \{1, 2\}$ имеет вид

	t^0	t^1	t^2
x_0	0	0	-1
x_1	0	-1	0
x_2	0	0	-1
x_3	1	3	-5
x_4	3	-8	15

Данная таблица не является двойственной допустимой: $t^2 \prec 0$.

Двойственный симплекс-метод

Введем дополнительное ограничение $x_5 = 10 - x_1 - x_2 \geq 0$, после выведения x_5 из базиса и введения вместо нее в базис x_2 получаем таблицу уже двойственно допустимую:

	t^0	t^1	t^5
x_0	10	1	1
x_1	0	-1	0
x_2	10	1	1
x_3	51	8	5
x_4	-147	-23	-15
x_5	0	0	-1

Двойственный симплекс-метод

Для этой таблицы $s = 4, l = 1$, поэтому сделаем итерацию двойственного симплекс-метода, пересчитав столбцы таблицы:

	t^0	t^4	t^5
x_0	$83/23$	$1/23$	$8/23$
x_1	$147/23$	$-1/23$	$15/23$
x_2	$83/23$	$1/23$	$8/23$
x_3	$-3/23$	$8/23$	$-5/23$
x_4	0	-1	0
x_5	0	0	-1

Теперь, выбирая по правилу метода $s = 3, l = 5$ получим оптимальную таблицу.

Двойственный симплекс-метод

Рассмотрим в качестве следующего примера задачу о кратчайшем пути из P_1 в P_5 в графе, изображенном на рис. 4, где цифрами указаны длины дуг:

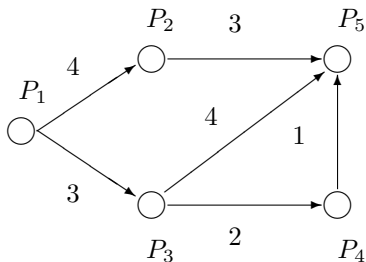


Рис. 4

Двойственный симплекс-метод

Соответствующая задача ЛП есть

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 + x_6 &\rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ -x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_2 + x_4 + x_5 &= 0 \\ -x_5 + x_6 &= 0 \\ -x_3 - x_4 - x_6 &= -1 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

Двойственный симплекс-метод

Выразив все переменные через x_2, x_4 и перейдя к задаче на max , получим симплекс-таблицу:

	t^0	t^2	t^4
x_0	-7	-1	1
x_1	1	1	0
x_2	0	-1	0
x_3	1	1	0
x_4	0	0	-1
x_5	0	-1	1
x_6	0	-1	1

Данная таблица не является двойственно допустимой: $t^2 \prec 0$.

Двойственный симплекс-метод

Однако учитывая, что в искомой цепи будет не более 3 дуг, то здесь выбор M будет проще: $M \geq 3$. Выберем вспомогательное неравенство в виде $x_7 = 3 - x_2 - x_4 \geq 0$. Выводя из базиса x_7 и вводя вместо x_7 переменную x_2 , приходим к таблице

	t^0	t^7	t^4
x_0	-4	1	2
x_1	-2	-1	-1
x_2	3	1	1
x_3	-2	-1	-1
x_4	0	0	-1
x_5	3	1	2
x_6	3	1	2
x_7	0	-1	0

Теперь, выбирая $s = 1, l = 7$, получим решение $x = (0, 1, 0, 0, 1, 1)^T$, которому соответствует цепь $P_1 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_5$.